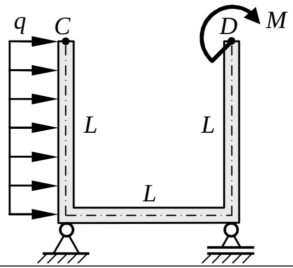
ПРЕМЕСТВАНИЯ И ЗАВЪРТАНИЯ В РАВНИННИ ЕЛАСТИЧНИ СИСТЕМИ, СЪСТАВЕНИ ОТ ГРЕДИ И ПРЪТИ

ЗАДАЧА № 4
НАМИРАНЕ НА ВЗАИМНО ПРЕМЕСТВАНЕ

УСЛОВИЕ:



Дадена е равнинна рамка, съставени от три греди.

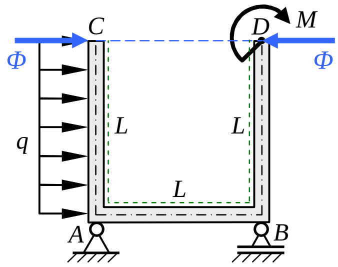
Да се намери взаимното преместване на точки *C* и *D*.

Дадено е:

q; $M = qL^2/2$; L; $EI = \text{const}$.

РЕШЕНИЕ:

1. **Точки *C* и *D* се свързват с права линия.**
2. **В точки *C* и *D* се прилагат две срещуположно насочени фиктивни сили *Φ*.**

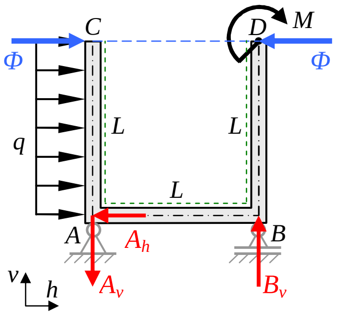


3. **Теорема на Кастиляно за конкретния случай.** Рамката има три участъка, всеки с дължина L и инерционен момент $I_{yi} = I$. В участъците могат да възникнат вътрешните усилия N, Q_z и M_y, от които се отчита само M_y, т.е.

$$\delta_{CD} = \frac{\partial U}{\partial \Phi} = \int_{L_1} \frac{M_{y1}}{EI}\frac{\partial M_{y1}}{\partial \Phi}dx + \int_{L_2} \frac{M_{y2}}{EI}\frac{\partial M_{y2}}{\partial \Phi}dx + \int_{L_3} \frac{M_{y3}}{EI}\frac{\partial M_{y3}}{\partial \Phi}dx. \qquad (1)$$

Необходимо е да се определят M_{y1}, M_{y2} и M_{y3}, и техните производни спрямо Φ.

3. Опорни реакции във функция на *Ф*.



$\sum M_{Ai} = 0$: $B_vL - qL^2/2 - M = 0$; $B_v = qL$.

$\sum h_i = 0$: $A_h - qL = 0$; $A_h = qL$.

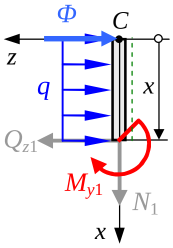
$\sum v_i = 0$: $A_v - B_v = 0$; $A_v = qL$.

Проверка:

$\sum M_{Di} = 0$: $A_v.L - A_h.L + qL^2/2 - M = 0$

$qL.L - qL.L + qL^2/2 - qL^2/2 = 0 \Rightarrow$ *вярно*.

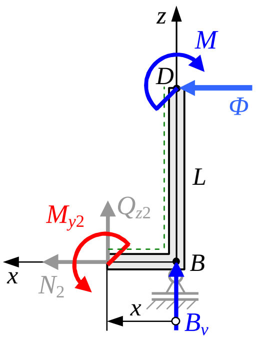
4. Вътрешни усилия във функция на *Ф*.



4.1. I участък (*AC*), дясна част, $x \in [0; L] \leftarrow$

$\sum M_{yi} = 0$: $M_{y1} + \Phi x + qx^2/2 = 0$; $M_{y1} = -\Phi x - qx^2/2$;

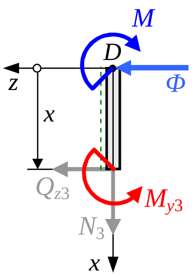
$\partial M_{y1}/\partial \Phi = -x$.



4.2. II участък (*AB*), лява част, $x \in [0; L] \rightarrow$

$\sum M_{yi} = 0$: $M_{y2} + \Phi L + B_vx - M = 0$; $M_{y2} = qL^2/2 - qLx - \Phi L$;

$\partial M_{y2}/\partial \Phi = -L$.



4.3. III участък (*BD*), лява част, $x \in [0; L] \rightarrow$

$\sum M_{yi} = 0$: $M_{y3} + \Phi x - M = 0$; $M_{y3} = qL^2/2 - \Phi x$;

$\partial M_{y3}/\partial \Phi = -x$.

5. Заместване в (1) и буквено решение. Полагам *Ф* = 0.

$$\delta_{CD} = \frac{1}{EI}\left[\int_0^L M_{y1}\frac{\partial M_{y1}}{\partial \Phi}dx + \int_0^L M_{y2}\frac{\partial M_{y2}}{\partial \Phi}dx + \int_0^L M_{y3}\frac{\partial M_{y3}}{\partial \Phi}dx\right];$$

$$\delta_{CD} = \frac{1}{EI}\left[\int_0^L\left(-\frac{qx^2}{2}\right)(-x)dx + \int_0^L\left(\frac{qL^2}{2} - qLx\right)(-L)dx + \int_0^L \frac{qL^2}{2}(-x)dx\right];$$

$$\delta_{CD} = \frac{1}{EI}\left[\int_0^L \frac{q}{2}x^3\,dx - \int_0^L \frac{qL^3}{2}dx + \int_0^L qL^2x\,dx - \int_0^L \frac{qL^2}{2}x\,dx\right] = \frac{1}{EI}\left[\frac{q}{2}\frac{L^4}{4} - \frac{qL^3}{2}L + qL^2\frac{L^2}{2} - \frac{qL^2}{2}\frac{L^2}{2}\right];$$

$$\delta_{CD} = -\frac{1}{8}\frac{qL^4}{EI}.$$