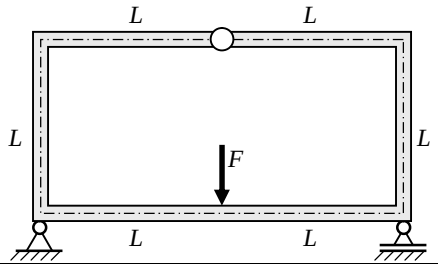
ЗАДАЧА № 2
РАЗКРИВАНЕ НА ВЪТРЕШНА СТАТИЧНА НЕОПРЕДЕЛИМОСТ – ИЗПОЛЗВАНЕ НА СВОЙСТВАТА НА СИМЕТРИЯТА

УСЛОВИЕ:



Дадена е равнинна рамка, съставена от прави греди, с главен инерционен момент на напречното сечение I, съдържаща една единична става.

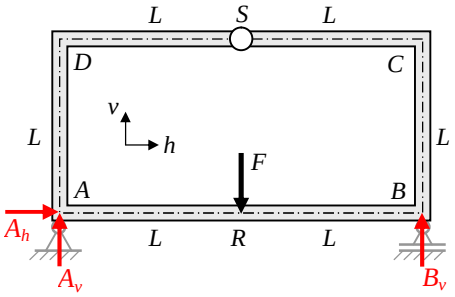
Да се построят диаграмите на вътрешните усилия.

Дадено е:

F; L; I; E.

РЕШЕНИЕ:

1. Опорни реакции.



$\sum h_i = 0;$ $\quad A_h = 0.$

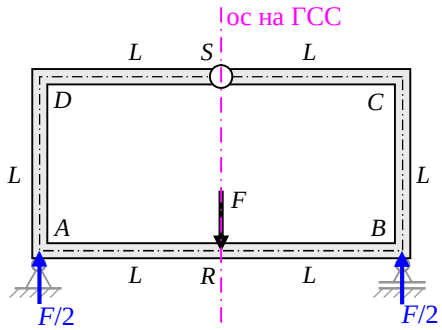
$\sum M_{Bi} = 0;$ $\quad A_v.2L - F.L = 0;$ $\quad A_v = F/2.$

$\sum v_i = 0;$ $\quad B_v + A_v - F = 0;$ $\quad B_v = F/2.$

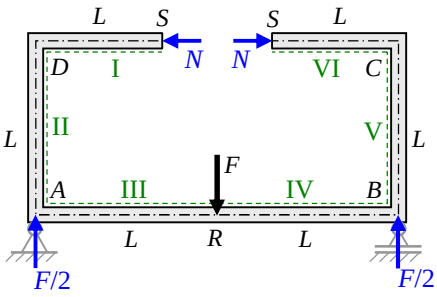
2. Степен на вътрешна статична неопределимост. Налице е един затворен контур, който е три пъти вътрешно статично неопределим ($k_2 = 3$). За единичната става S се съставя допълнителното условие $\sum M_{yi}^S = 0$, което намалява k_2 с единица. Освен това, ставата лежи върху ос на геометрична и силова симетрия (ГСС). От свойствата на симетрията следва, че $Q_z^S = 0$. Това условие също намалява k с единица. Тогава

$k_2 = 3 - 1 - 1 = 1$, *системата е един път вътрешно статично неопределима*.

Единственото вътрешно усилие в ставата, което не може да се определи от статичните условия за равновесия и горните условия, е N. То трябва да се приеме за известно.



3. **Еквивалентна система**. Ставата S се разглобява; означава се неизвестното вътрешното усилие N в нея; N се приема за известно. Тъй като е логично да се предположи, че гредите DS и SC са подложени на натиск, N се насочва *към* сечението S.



4. **Теорема на Кастиляно за конкретния случай.** Рамката има шест участъка, всеки с дължина L (означени на схемата). Тъй като и шестте участъка са греди, в тях могат да възникнат вътрешните усилия N, Q_z и M_y, от които се отчита само M_y. Следователно:

$$\delta_{Sh}=\frac{\partial U}{\partial N}=\int_{L_1}\frac{M_{y1}}{EI}\frac{\partial M_{y1}}{\partial N}dx+\int_{L_2}\frac{M_{y2}}{EI}\frac{\partial M_{y2}}{\partial N}dx+\int_{L_3}\frac{M_{y3}}{EI}\frac{\partial M_{y3}}{\partial N}dx+\int_{L_4}\frac{M_{y4}}{EI}\frac{\partial M_{y4}}{\partial N}dx+\int_{L_5}\frac{M_{y5}}{EI}\frac{\partial M_{y5}}{\partial N}dx+\int_{L_6}\frac{M_{y6}}{EI}\frac{\partial M_{y6}}{\partial N}dx=0. \quad (1)$$

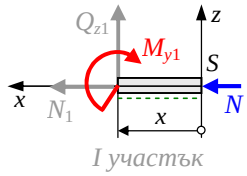
Тъй като вътрешното усилие M_y е симетрично, $M_{y1}=M_{y6}$; $M_{y2}=M_{y5}$; $M_{y3}=M_{y4}$. Като се отчете също, че $L_1=L_2=L_3=L_4=L_5=L_6=L$, равенство (1) може да се преработи:

$$\frac{2}{EI}\int_L M_{y1}\frac{\partial M_{y1}}{\partial N}dx+\frac{2}{EI}\int_L M_{y2}\frac{\partial M_{y2}}{\partial N}dx+\frac{2}{EI}\int_L M_{y3}\frac{\partial M_{y3}}{\partial N}dx=0;$$

$$\int_L M_{y1}\frac{\partial M_{y1}}{\partial N}dx+\int_L M_{y2}\frac{\partial M_{y2}}{\partial N}dx+\int_L M_{y3}\frac{\partial M_{y3}}{\partial N}dx=0. \quad (2)$$

Необходимо е да се определят M_{y1}, M_{y2} и M_{y3}, и техните производни спрямо N.

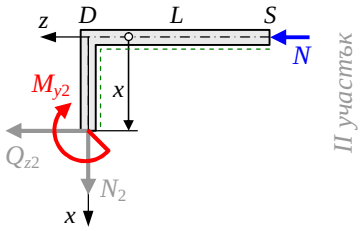
5. **Вътрешни усилия във функция на N и производни.**



5.1. I участък (SD), дясна част, $x\in[0;L]$ ←

$\sum M_{yi}=0$: $M_{y1}=0$;

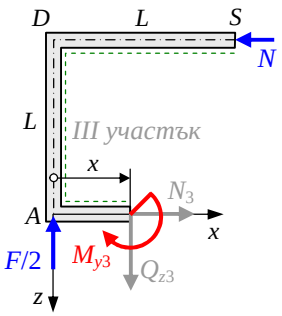
$\partial M_{y1}/\partial N=0$.



5.2. II участък (DA), дясна част, $x\in[0;L]$ ←

$\sum M_{yi}=0$: $M_{y2}-N.x=0$; $M_{y2}=N.x$;

$\partial M_{y2}/\partial N=x$.



5.3. III участък (AR), дясна част, $x\in[0;L]$ ←

$\sum M_{yi}=0$: $M_{y3}-N.L+F/2.x=0$; $M_{y3}=N.L-F.x/2$;

$\partial M_{y3}/\partial N=L$.

6. Заместване в (2) и буквено решение.

$$\int_0^L M_{y1}\frac{\partial M_{y1}}{\partial N}dx+\int_0^L M_{y2}\frac{\partial M_{y2}}{\partial N}dx+\int_0^L M_{y3}\frac{\partial M_{y3}}{\partial N}dx=0;$$

$$\int_0^L 0.0\,dx+\int_0^L Nx.x\,dx+\int_0^L\left(NL-\frac{F}{2}x\right)L\,dx=0;\qquad N\frac{L^3}{3}+NL^2L-\frac{FL}{2}\frac{L^2}{2}=0;\qquad N\left(\frac{1}{3}+1\right)=\frac{F}{4};\qquad \frac{4}{3}N=\frac{1}{4}F;$$

$$N=\frac{3}{16}F.$$

7. Диаграми на вътрешните усилия. Използват се схемите от точка 5.

7.1. I участък (*SD*), дясна част, $x\in[0;\,L]$ ←

$\sum N_i = 0$: $N_1 + N = 0$; $N_1 = -N = -3F/16 = \text{const}$.

$\sum z_i = 0$: $Q_{z1} = 0$.

$\sum M_{yi} = 0$: $M_{y1} = 0$.

7.2. II участък (*DA*), дясна част, $x\in[0;\,L]$ ←

$\sum N_i = 0$: $N_2 = 0$.

$\sum z_i = 0$: $Q_{z2} + N = 0$; $Q_{z2} = -N = -3F/16 = \text{const}$.

$\sum M_{yi} = 0$: $M_{y2} - N.x = 0$; $M_{y2} = N.x = 3Fx/16$ – уравнение на права линия;

при $x = 0$: $M_{y2} = 0$; при $x = L$: $M_{y2} = 3FL/16$.

7.3. III участък (*AR*), дясна част, $x\in[0;\,L]$ ←

$\sum N_i = 0$: $N_3 - N = 0$; $N_3 = N = 3F/16 = \text{const}$.

$\sum z_i = 0$: $Q_{z3} - F/2 = 0$; $Q_{z3} = F/2 = \text{const}$.

$\sum M_{yi} = 0$: $M_{y3} - N.L + F/2.x = 0$; $M_{y3} = NL - Fx/2 = 3FL/16 - Fx/2$ – уравнение на права линия;

при $x = 0$: $M_{y3} = 3FL/16$; при $x = L$: $M_{y3} = -5FL/16$.

Вътрешните усилия в участъци IV, V и VI се построяват по правилата на симетрията:

$N_4 = N_3$; $N_5 = N_2$; $N_6 = N_1$; $Q_{z4} = -Q_{z3}$; $Q_{z5} = -Q_{z2}$; $Q_{z6} = -Q_{z1}$; $M_{y4} = M_{y3}$; $M_{y5} = M_{y2}$; $M_{y6} = M_{y1}$.