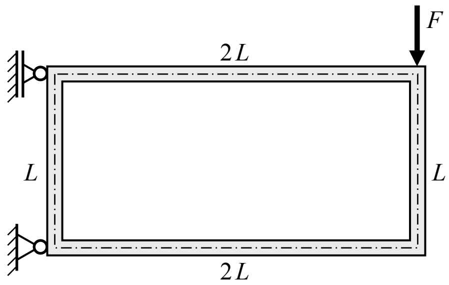
ЗАДАЧА № 3
РАЗКРИВАНЕ НА ВЪТРЕШНА СТАТИЧНА НЕОПРЕДЕЛИМОСТ

УСЛОВИЕ:



Дадена е равнинна рамка, съставена от прави греди, с главен инерционен момент на напречното сечение I.

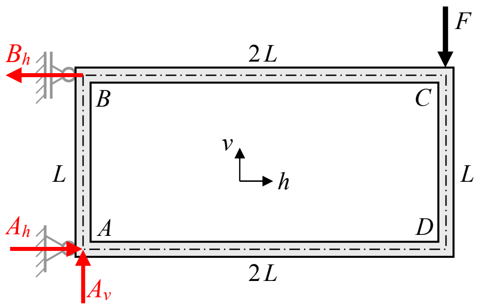
Да се построят диаграмите на вътрешните усилия.

Дадено е:

F; L; I; E.

РЕШЕНИЕ:

1. Опорни реакции.



$\sum M_{Ai} = 0;$ $\quad B_h.L - F.2L = 0;$ $\quad B_h = 2F.$

$\sum h_i = 0;$ $\quad A_h - B_h = 0;$ $\quad A_h = B_h = 2F.$

$\sum v_i = 0;$ $\quad A_v - F = 0;$ $\quad A_v = F.$

2. Степен на вътрешна статична неопределимост. Налице е един затворен контур, който е три пъти вътрешно статично неопределим: $k_2 = 3$.

Вътрешните усилия N, Q_z и M_y в произволно сечение не могат да се определят от статичните условия за равновесие.

3. Еквивалентна система. Прави се сечение през гредата BC, безкрайно близко до възела B. Вътрешните усилия в това сечение се означават като N, Q и M, и се приемат за известни.

На следващата схема (за удобство – дадена в точка 5) N, Q и M са ориентирани според гредата BC; посоките им за гредата AB са противоположни на тези за BC.

4. Теорема на Кастиляно за конкретния случай. Рамката има четири участъка, означени на следващата схема. Тъй като и четирите участъка са греди, в тях могат да възникнат вътрешните усилия N, Q_z и M_y, от които се отчита само M_y. Следователно:

$$\delta_{Bh} = \frac{\partial U}{\partial N} = \int_{L_1} \frac{M_{y1}}{EI}\frac{\partial M_{y1}}{\partial N}dx + \int_{L_2} \frac{M_{y2}}{EI}\frac{\partial M_{y2}}{\partial N}dx + \int_{L_3} \frac{M_{y3}}{EI}\frac{\partial M_{y3}}{\partial N}dx + \int_{L_4} \frac{M_{y4}}{EI}\frac{\partial M_{y4}}{\partial N}dx = 0; \qquad (1)$$

$$\delta_{Bv} = \frac{\partial U}{\partial Q} = \int_{L_1} \frac{M_{y1}}{EI}\frac{\partial M_{y1}}{\partial Q}dx + \int_{L_2} \frac{M_{y2}}{EI}\frac{\partial M_{y2}}{\partial Q}dx + \int_{L_3} \frac{M_{y3}}{EI}\frac{\partial M_{y3}}{\partial Q}dx + \int_{L_4} \frac{M_{y4}}{EI}\frac{\partial M_{y4}}{\partial Q}dx = 0; \qquad (2)$$

$$\alpha_{B} = \frac{\partial U}{\partial M} = \int_{L_1} \frac{M_{y1}}{EI}\frac{\partial M_{y1}}{\partial M}dx + \int_{L_2} \frac{M_{y2}}{EI}\frac{\partial M_{y2}}{\partial M}dx + \int_{L_3} \frac{M_{y3}}{EI}\frac{\partial M_{y3}}{\partial M}dx + \int_{L_4} \frac{M_{y4}}{EI}\frac{\partial M_{y4}}{\partial M}dx = 0; \qquad (3)$$

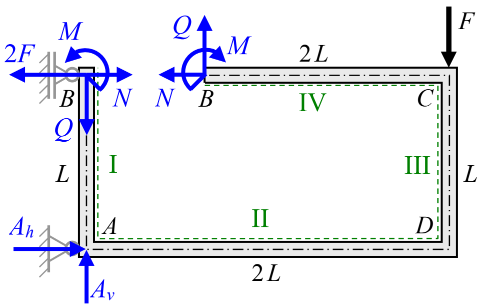
След като двете страни на уравнения (1), (2) и (3) се умножат по EI, от тях се получава следната система от три уравнения, в която има три неизвестни (N, Q и M):

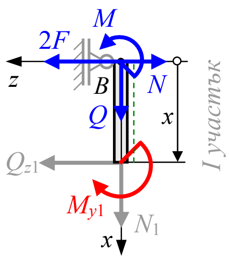
Copyright © 2013 доц. Николай Николов, Технически университет – София. Всички права запазени.
Източник: http://smat.info

$$\begin{cases}\int\limits_{L_1} M_{y1}\dfrac{\partial M_{y1}}{\partial N}dx+\int\limits_{L_2} M_{y2}\dfrac{\partial M_{y2}}{\partial N}dx+\int\limits_{L_3} M_{y3}\dfrac{\partial M_{y3}}{\partial N}dx+\int\limits_{L_4} M_{y4}\dfrac{\partial M_{y4}}{\partial N}dx=0\\ \int\limits_{L_1} M_{y1}\dfrac{\partial M_{y1}}{\partial Q}dx+\int\limits_{L_2} M_{y2}\dfrac{\partial M_{y2}}{\partial Q}dx+\int\limits_{L_3} M_{y3}\dfrac{\partial M_{y3}}{\partial Q}dx+\int\limits_{L_4} M_{y4}\dfrac{\partial M_{y4}}{\partial Q}dx=0.\\ \int\limits_{L_1} M_{y1}\dfrac{\partial M_{y1}}{\partial M}dx+\int\limits_{L_2} M_{y2}\dfrac{\partial M_{y2}}{\partial M}dx+\int\limits_{L_3} M_{y3}\dfrac{\partial M_{y3}}{\partial M}dx+\int\limits_{L_4} M_{y4}\dfrac{\partial M_{y4}}{\partial M}dx=0\end{cases} \qquad (4)$$

Необходимо е да се определят M_{y1}, M_{y2}, M_{y3} и M_{y4}, и техните производни спрямо N, Q и M.

5. Вътрешни усилия във функция на N, Q и M и производни.





5.1. I участък (BA), дясна част, $x \in [0; L] \leftarrow$

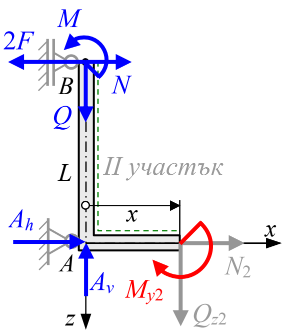
$\sum M_{yi} = 0$: $\quad M_{y1} - 2Fx - M + Nx = 0$;

$M_{y1} = 2Fx + M - Nx$;

$\partial M_{y1}/\partial N = -x$;

$\partial M_{y1}/\partial Q = 0$;

$\partial M_{y1}/\partial M = 1$.



5.2. II участък (AD), дясна част, $x \in [0; 2L] \leftarrow$

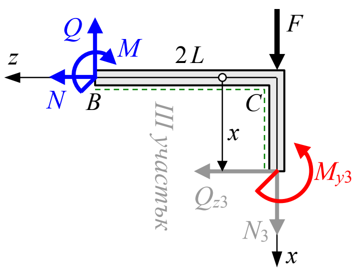
$\sum M_{yi} = 0$: $\quad M_{y2} + Fx - 2FL + NL - Qx - M = 0$;

$M_{y2} = 2FL + Qx + M - Fx - NL$;

$\partial M_{y2}/\partial N = -L$;

$\partial M_{y2}/\partial Q = x$;

$\partial M_{y2}/\partial M = 1$.



5.3. III участък (CD), лява част, $x \in [0; L] \rightarrow$

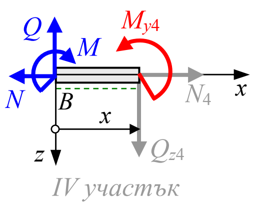
$\sum M_{yi} = 0$: $\quad M_{y3} + Nx - 2QL - M = 0$;

$M_{y3} = M + 2QL - Nx$;

$\partial M_{y3}/\partial N = -x$;

$\partial M_{y3}/\partial Q = 2L$;

$\partial M_{y3}/\partial M = 1$.



5.4. IV участък (BC), лява част, $x \in [0; 2L] \rightarrow$

$\sum M_{yi} = 0$: $\quad M_{y4} - Qx - M = 0$;

$M_{y4} = Qx + M$;

$\partial M_{y4}/\partial N = 0$;

$\partial M_{y4}/\partial Q = x$;

$\partial M_{y4}/\partial M = 1$.

Copyright © 2013 доц. Николай Николов, Технически университет – София. Всички права запазени.
Източник: http://smat.info

6. Заместване в (4) и буквено решение.

Първо уравнение от система (4):

$$\int_0^L M_{y1}\frac{\partial M_{y1}}{\partial N}dx+\int_0^{2L} M_{y2}\frac{\partial M_{y2}}{\partial N}dx+\int_0^L M_{y3}\frac{\partial M_{y3}}{\partial N}dx+\int_0^{2L} M_{y4}\frac{\partial M_{y4}}{\partial N}dx=0;$$

$$\int_0^L (2Fx+M-Nx)(-x)dx+\int_0^{2L}(2FL+Qx+M-Fx-NL)(-L)dx+\int_0^L (M+2QL-Nx)(-x)dx+\int_0^{2L}(Qx+M)0\,dx=0;$$

$$-\frac{2}{3}FL^3-\frac{1}{2}ML^2+\frac{1}{3}NL^3-4FL^3-2QL^3-2ML^2+2FL^3+2NL^3-\frac{1}{2}ML^2-QL^3+\frac{1}{3}NL^3=0;$$

$$\frac{8}{3}NL-3QL-3M-\frac{8}{3}FL=0.$$

Второ уравнение от система (4):

$$\int_0^L M_{y1}\frac{\partial M_{y1}}{\partial Q}dx+\int_0^{2L} M_{y2}\frac{\partial M_{y2}}{\partial Q}dx+\int_0^L M_{y3}\frac{\partial M_{y3}}{\partial Q}dx+\int_0^{2L} M_{y4}\frac{\partial M_{y4}}{\partial Q}dx=0;$$

$$\int_0^L (2Fx+M-Nx)0\,dx+\int_0^{2L}(2FL+Qx+M-Fx-NL)x\,dx+\int_0^L (M+2QL-Nx)2L\,dx+\int_0^{2L}(Qx+M)x\,dx=0;$$

$$4FL^3+\frac{8}{3}QL^3+2ML^2-\frac{8}{3}FL^3-2NL^3+2ML^2+4QL^3-NL^3+\frac{8}{3}QL^3+2ML^2=0;$$

$$-3NL+\frac{28}{3}QL+6M+\frac{4}{3}FL=0.$$

Трето уравнение от система (4):

$$\int_0^L M_{y1}\frac{\partial M_{y1}}{\partial M}dx+\int_0^{2L} M_{y2}\frac{\partial M_{y2}}{\partial M}dx+\int_0^L M_{y3}\frac{\partial M_{y3}}{\partial M}dx+\int_0^{2L} M_{y4}\frac{\partial M_{y4}}{\partial M}dx=0;$$

$$\int_0^L (2Fx+M-Nx)1\,dx+\int_0^{2L}(2FL+Qx+M-Fx-NL)1\,dx+\int_0^L (M+2QL-Nx)1\,dx+\int_0^{2L}(Qx+M)1\,dx=0;$$

$$FL^2+ML-\frac{1}{2}NL^2+4FL^2+2QL^2+2ML-2FL^2-2NL^2+ML+2QL^2-\frac{1}{2}NL^2+2QL^2+2ML=0;$$

$$-NL+2QL+2M+FL=0.$$

Решение на система (4):

$$\left|\begin{array}{ll}\frac{8}{3}NL-3QL-3M-\frac{8}{3}FL=0 & \\ -3NL+\frac{28}{3}QL+6M+\frac{4}{3}FL=0 & \\ -NL+2QL+2M+FL=0 & \Rightarrow N=2Q+\frac{2M}{L}+F;\end{array}\right.$$

$$\left|\begin{array}{ll}\frac{8}{3}L\left(2Q+\frac{2M}{L}+F\right)-3QL-3M-\frac{8}{3}FL=0 & \Rightarrow M=-QL;\\ -3L\left(2Q+\frac{2M}{L}+F\right)+\frac{28}{3}QL+6M+\frac{4}{3}FL=0 & \Rightarrow Q=\frac{1}{2}F;\end{array}\right.$$

$$N=F;\qquad Q=\frac{1}{2}F;\qquad M=-\frac{1}{2}FL.$$

Copyright © 2013 доц. Николай Николов, Технически университет – София. Всички права запазени.
Източник: http://smat.info

7. Диаграми на вътрешните усилия. Използват се схемите от точка 5.

7.1. I участък (BA), дясна част, $x \in [0; L] \leftarrow$

$\sum N_i = 0$: $N_1 + F/2 = 0$; $N_1 = -F/2 = \text{const.}$

$\sum z_i = 0$: $Q_{z1} + 2F - F = 0$ $Q_{z1} = -F$.

$\sum M_{yi} = 0$: $M_{y1} - 2Fx + FL/2 + Fx = 0$; $M_{y1} = Fx - FL/2$ – уравнение на права линия;

при $x = 0$: $M_{y1} = -FL/2$; при $x = L$: $M_{y1} = FL/2$.

7.2. II участък (AD), дясна част, $x \in [0; 2L] \leftarrow$

$\sum N_i = 0$: $N_2 + F - 2F + 2F = 0$; $N_2 = -F = \text{const.}$

$\sum z_i = 0$: $Q_{z2} - F + F/2 = 0$; $Q_{z2} = F/2 = \text{const.}$

$\sum M_{yi} = 0$: $M_{y2} + Fx + FL - 2FL - Fx/2 + FL/2 = 0$; $M_{y2} = FL/2 - Fx/2$ – уравнение на права линия;

при $x = 0$: $M_{y2} = FL/2$; при $x = 2L$: $M_{y2} = -FL/2$.

7.3. III участък (CD), лява част, $x \in [0; L] \rightarrow$

$\sum N_i = 0$: $N_3 - F/2 + F = 0$; $N_3 = -F/2 = \text{const.}$

$\sum z_i = 0$: $Q_{z3} + F = 0$; $Q_{z3} = -F = \text{const.}$

$\sum M_{yi} = 0$: $M_{y3} + Fx - 2L.F/2 + FL/2 = 0$; $M_{y3} = FL/2 - Fx$ – уравнение на права линия;

при $x = 0$: $M_{y3} = FL/2$; при $x = L$: $M_{y3} = -FL/2$.

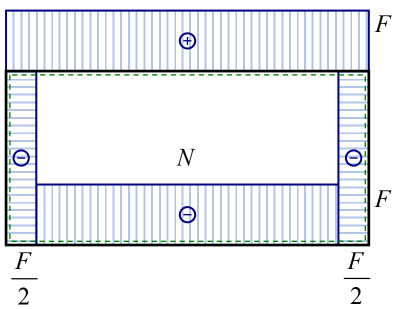
7.4. IV участък (BC), лява част, $x \in [0; 2L] \rightarrow$

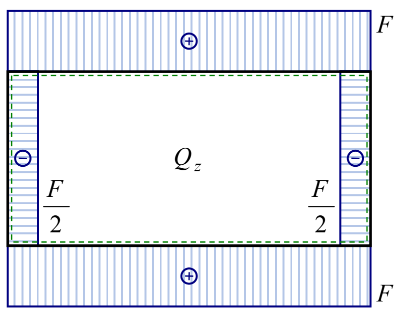
$\sum N_i = 0$: $N_4 - F = 0$; $N_4 = F = \text{const.}$

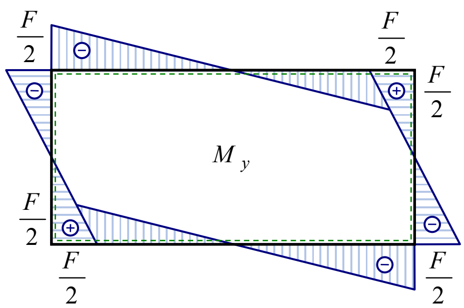
$\sum z_i = 0$: $Q_{z4} - F/2 = 0$; $Q_{z4} = F/2 = \text{const.}$

$\sum M_{yi} = 0$: $M_{y4} + FL/2 - Fx/2 = 0$; $M_{y4} = Fx/2 - FL/2$ – уравнение на права линия;

при $x = 0$: $M_{y4} = -FL/2$; при $x = 2L$: $M_{y4} = FL/2$.







Copyright © 2013 доц. Николай Николов, Технически университет – София. Всички права запазени.
Източник: http://smat.info